3.55 REMARQUE
Ce résultat peut aussi se montrer en utilisant le critère de Cauchy comme suit.
Pour tous $x < y$ dans $[a, b[$ on a :

$$\left|\int_x^y f(t)dt\right| \leq \int_x^y |f(t)|dt.$$

De la convergence de $\int_a^b |f(x)|dx$ on déduit que pour tout $\epsilon > 0$ on peut trouver $c \in [\alpha,\ b[$ tel que pour $c \leq x < y < b$ on ait $\int_x^y |f(t)|dt \leq \epsilon$ ce qui entraîne $|\int_x^y f(t)dt| \leq \epsilon$. Le critère de Cauchy permet alors de conclure.

3.56 EXEMPLE. Pour tout réel $\alpha > 1$. les intégrales $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^\alpha}dx$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^\alpha}dx$ sont absolument convergentes.

Ceci résulte de la convergence des intégrales de Riemann $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ pour $\alpha > 1$ et de :

$$\forall x \geq 1,\ \left|\frac{\sin(x)}{x^\alpha}\right| \leq \frac{1}{x^\alpha} \text{ et } \left|\frac{\cos(x)}{x^\alpha}\right| \leq \frac{1}{x^\alpha}.$$

3.57 EXEMPLE. Pour tout $\alpha > 0$ les intégrales $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^\alpha}dx$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^\alpha}dx$ sont convergentes.

On va traiter le cas de $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^\alpha}dx$ celui de $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^\alpha}dx$ s'obtient de la même manière. Une intégration par parties donne, pour tout réel $x > 1$:

$$\int_1^x \frac{\sin(t)}{t^\alpha}dt = \cos(1) - \frac{\cos(x)}{x^\alpha} + \alpha \int_1^x \frac{\cos(t)}{t^{\alpha+1}}dt.$$

Comme

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\cos(x)}{x^\alpha} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^\alpha} = 0$$

et $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(x)}{t^{\alpha+1}}dx$ converge absolument (l'exemple précédent), donc $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^\alpha}dx$ est convergente.

3.58 EXEMPLE. *Les intégrales* $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^\alpha}dx$ *et* $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^\alpha}dx$ *convergentes* $\iff$ $\alpha > 0$.
On a déjà montré (voir l'exemple précédent), si $\alpha > 0$ les intégrales $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^\alpha}dx$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^\alpha}dx$ sont convergentes, il suffit maintenant de montrer que ces intégrales divergent si $\alpha \leq 0$. On va traiter le cas de $\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^\alpha}dx$ celui de $\int_1^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^\alpha}dx$ s'obtient de la même manière.

En remarquant, que si $x \in [2n\pi, (2n+1)\pi]$, $\sin(x) \geq 0$, alors pour $\alpha \leq 0$

$$\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}dt \geq \frac{1}{(2n\pi)^\alpha} \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \sin(t)dt$$

D'autre part, par le changement de variable $u = t - 2n\pi$, on obtient

$$\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \sin(t)dt = \int_0^\pi \sin(u)du = 2,$$

par conséquent, puisque $\alpha \leq 0$, on a $\displaystyle\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}dt \geq \frac{2}{(2n\pi)^\alpha} \geq 2$. Maintenant, si $\epsilon = 1$, pour tout $C > 1$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $C < 2n\pi$ et $\displaystyle\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \frac{\sin(t)}{t^\alpha}dt \geq 2 > \epsilon$ le critère de Cauchy n'étant pas satisfait, on déduit que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^\alpha}dx$ diverge.

3.59 EXEMPLE. On va maintenant, étendre l'étude aux intégrales généralisées $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^\alpha}dx$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^\alpha}dx$. On a déjà traité, dans l'exemple précédent, les intégrales sur $[1, +\infty[$, il suffit détudier maintenant la convergence en 0.

On a $\sin(x) \underset{0}{\sim} x$ par suite $\displaystyle\frac{\sin(x)}{x^\alpha} \underset{0}{\sim} \frac{1}{x^{\alpha-1}}$ comme l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^{\alpha-1}}$ converge si et seulement si $\alpha - 1 < 1$ c-à-d $\alpha < 2$, il en est de de même $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(x)}{x^\alpha}dx$.

D'autre part, $\cos(x) \underset{0}{\sim} 1$ par suite $\displaystyle\frac{\cos(x)}{x^\alpha} \underset{0}{\sim} \frac{1}{x^\alpha}$ comme l'intégrale de Riemann $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha < 1$, il en est de de même $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos(x)}{x^\alpha}dx$.

En résumé :

$\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^\alpha}dx \text{ converge } \iff 0 < \alpha < 2}$ et $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^\alpha}dx \text{ converge } \iff 0 < \alpha < 1}$

3.60 REMARQUE

$$\forall x \in]0, +\infty[,\ e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x).$$

Donc, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^\alpha}dx$ est convergente si et seulement si les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x^\alpha}dx$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^\alpha}dx$ le sont, ainsi

$\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^\alpha}dx \text{ converge } \iff 0 < \alpha < 1}$

3.2.1 Une condition nécessaire de convergence de $\int_a^{+\infty} f(x)dx$

On sait qu'une condition nécessaire de convergence d'une série numérique est que son terme général tende vers 0.

Dans le cas des fonctions continues, la convergence de $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)dx$ n'implique pas nécessairement que f soit nulle à l'infini comme le montre l'exemple qui suit.

3.61 EXEMPLE. Soit $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}_+$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} 2^n & \text{si } x \in [n, n + \frac{1}{4^n}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour tout réel $x \geq 2$, on a :

$$F(x) = \int_1^x f(t)dt \leq \int_1^{\lfloor x \rfloor + 1} f(t)dt = \sum_{i=1}^{\lfloor x \rfloor + 1} \frac{2^i}{4^i} \leq \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{2^i} = 1$$

où $\lfloor x \rfloor$ est la partie entière de x. La fonction F est donc croissante majorée sur $\mathbb{R}^+$ et par conséquent admet une limite finie en $+\infty$, ce qui signifie que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)dx$ est convergente.

Mais, f ne converge pas vers 0 en $+\infty$, par exemple, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(n) = \lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$, par contre $\lim\limits_{n\to+\infty} f\left(\dfrac{2n+1}{2}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} 0 = 0$.

On a néanmoins la proposition suivante :

3.62 PROPOSITION

Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction localement intégrable.
Si l'intégrale généralisée $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ converge absolument, alors 0 est une valeurs d'adhérence de f en $+\infty$ c'est à dire $\forall \epsilon > 0$ et $\forall A > a$, il existe $x \in [A, +\infty[$ tel que $|f(x)| \leq \epsilon$.

Démonstration: Si ce n'est pas le cas, il existerait des réels, $\epsilon > 0$ et $A > a$ tels que pour tout $x \in [A, +\infty[$, $|f(x)| > \epsilon$. Alors pour tout $X \in]A, +\infty[$ on a

$$\int_a^X |f(x)|dx = \int_a^A |f(x)|dx + \int_A^X |f(x)|dx \geq \int_a^A |f(x)|dx + \epsilon(X - A)$$

D'où $\lim\limits_{X\to+\infty} \int_a^X |f(x)|dx = +\infty$, ce qui contredit la convergence absolue de l'intégrale généralisée de f sur $[a, +\infty[$. ∎

3.64 Exercice Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ définie par $f(x) = \dfrac{e^x}{1 + e^{4x}\sin^2(x)}$

1) Montrer que $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ converge.

2) Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de f en $+\infty$ est égal à $\mathbb{R}_+$.

3.65 Exercice Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue. Montrer que si l'intégrale généralisée $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ converge absolument, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

3.3 Comparaison entre intégrale généralisée et série

3.66 THÉORÈME

Soient $-\infty < a < b \leq +\infty$ et $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction localement intégrable. Soit $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de points de $[a,\ b[$ telle que $\alpha_0 = a$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = b$.

L'intégrale généralisée $\int_a^b |f(x)|dx$ est convergente si, et seulement si, la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n$ est convergente, où $I_n = \int_{\alpha_n}^{\alpha_{n+1}} |f(x)|dx$.

En cas de convergence on a $\int_a^b |f(x)|dx = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \int_{\alpha_n}^{\alpha_{n+1}} |f(x)|dx$.

Démonstration: Supposons que $\int_a^b |f(x)|dx$ converge et notons S sa valeur.

On a, $0 \leq \int_a^{\alpha_{n+1}} |f(x)|dx = \sum\limits_{k=0}^{n} \int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}} |f(x)|dx \leq \int_a^b |f(x)|dx = S$, la série à termes positifs $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n$ est alors convergente et de somme $\leq S$.

Supposons maintenant que $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n$ converge et notons S' sa valeur. Soit $X \in [a, b[$, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = b$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $X \leq \alpha_n$, d'où

$$\int_a^X |f(t)|dt \leq \int_0^{\alpha_{n+1}} |f(x)|dx = \sum_{k=0}^{n} \int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}} |f(x)|dx \leq S'.$$

Ainsi $\int_a^b |f(x)|dx$ converge et sa valeur $\leq S'$. Par conséquent s'il y a convergence on aura $S = S'$. ■

Dans le cas d'une fonction décroissante et à valeurs réelles positives, on a le résultat suivant qui permet parfois de justifier la convergence d'une intégrale en utilisant la série $\sum f(n)$.

3.68 COROLLAIRE
Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}_+$ est une fonction localement intégrable décroissante, alors l'intégrale généralisée $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est de même nature que série $\sum f(n)$.

Démonstration: D'après le théorème précédent, pour $\alpha_n = n$, l'intégrale généralisée $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est de même nature que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \int_n^{n+1} f(x)dx$, d'autre part, comme f est décroissante

$$f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(x)dx \leq f(n)$$

par conséquent la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \int_n^{n+1} f(x)dx$ est de même nature que $\sum f(n)$. ■

3.70 EXEMPLE. Montrons que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^\alpha}dx$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.
Pour ce faire, on utilise la suite $\alpha_n = n\pi$, pour $n \geq 1$, :
si $\alpha > 0$ on a :

$$\frac{1}{((n+1)\pi)^\alpha} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \sin^2(t)dt \leq \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin^2(t)}{t^\alpha}dt \leq \frac{1}{(n\pi)^\alpha} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \sin^2(t)dt$$

si $\alpha \leq 0$ on a :

$$\frac{1}{(n\pi)^\alpha} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \sin^2(t)dt \leq \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin^2(t)}{t^\alpha}dt \leq \frac{1}{((n+1)\pi)^\alpha} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \sin^2(t)dt.$$

D'autre part, par le changement de variable $u = t - n\pi$, on obtient

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \sin^2(t)dt = \int_0^\pi \sin^2(u)du = \int_0^\pi \frac{1-\cos(2u)}{2}du = \frac{\pi}{2}.$$

Par conséquent la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin^2(t)}{t^\alpha}dt$ est de même nature que la série de riemann $\frac{\pi^{\alpha-1}}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, cette dernière est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.
Ainsi, $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^\alpha}dx$ est convergente $\iff \alpha > 1$.

3.4 Intégrales semi-convergentes

On va dans cette partie donner une condition suffisante pour la convergence de certaines intégrales généralisées, qui ne sont pas absolument convergentes; pour cela on a besoin de ce qu'on appelle la seconde formule de la moyenne.

3.71 PROPOSITION (PREMIÈRE FORMULE DE LA MOYENNE)
Soient f et g deux fonctions Riemann-intégrables sur $[a,\ b]$ à valeurs réelles, f étant continue et g positive. Alors :

$$\exists c \in [a,\ b],\ \int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx.$$

Démonstration: On note par $m = \min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ et $M = \max_{x\in[a,b]} f(x)$. Comme la fonction g est positive, on a pour tout $x \in [a, b]$,

$$mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x).$$

En intégrant, on obtient,

$$m\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M\int_a^b g(x)dx.$$

Il suffit d'établir l'inégalité suivante

$$m\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M\int_a^b g(x)dx.$$

Si $\displaystyle\int_a^b g(x)dx = 0$, on aura $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$, d'où pour tout $c \in [a, b]$ on a l'égalité.
Si $\displaystyle\int_a^b g(x)dx > 0$, on aura $\displaystyle\frac{1}{\int_a^b g(x)dx}\int_a^b f(x)g(x)dx \in [m, M]$ d'après le théorème des valeurs intermédiares, Il existe un réel $c \in [a,\ b]$ vérifiant

$$\frac{1}{\int_a^b g(x)dx}\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c).$$

c'est à dire $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx.$ ■

On va établir maintenant la seconde formule de la moyenne, cette formule s'avère plus utile que la précédente :

3.73 PROPOSITION (SECONDE FORMULE DE LA MOYENNE)
Soient f et g deux fonctions localement intégrales sur $[a,\ b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose que f est décroissante et positive. Alors,

$$\exists c \in [a,\ b],\ \int_a^b f(x)g(x)dx = f(a)\int_a^c g(x)dx.$$

Démonstration: Soit G application définie par, $G:\ [a,\ b] \to \mathbb{R} \quad x \mapsto \displaystyle\int_a^x g(t)dt.$
L'application g étant Riemann-intégrable, G est continue sur le segment $[a,\ b]$, on note $m = \min\limits_{x\in[a,b]} G(x)$ et $M = \max_{x\in[a,b]} G(x)$, on a aussi $G(a) = 0$.

Il suffit d'établir l'inégalité suivante

$$f(a)m \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq f(a)M.$$

En effet, si $f(a) = 0$, comme f est d'écroissante, f serait identiquement nulle, par conséquent $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)dx = 0 = 0\int_a^c g(x)dx$, ce qui donne le résultat, pour tout $c \in [a, b]$.

On peut donc, supposer que $f(a) > 0$, alors $\dfrac{1}{f(a)}\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)dx \in [m, M]$ et le théorème des valeurs intermédiaires, donne l'existence de $c \in [a, b]$ tel que

$$\frac{1}{f(a)}\int_a^b f(x)g(x)dx = G(c) = \int_a^c g(x)dx,$$

ce qui établira le résultat.

1) On considère pour $n \in \mathbb{N}^*$, la subdivision régulière $\sigma_n = \left(x_i = a + i\dfrac{b-a}{n}\right)_{0\le i\le n-1}$ de $[a, b]$ et la fonction $f_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)\mathbb{1}_{[x_i,x_{i+1}[} + f(b)\mathbb{1}_{\{b\}}$. Nous remarquons que f_n est en escalier, positive, décroissante et comme $G(a) = 0$ on aura

$$\int_a^b f_n(x)g(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}} f_n(x)g(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} f_n(x_i)\int_{x_i}^{x_{i+1}} g(x)dx = \sum_{i=0}^{n-1} f_n(x_i)(G(x_{i+1}) - G(x_i))$$

$$= f_n(x_{n-1})G(x_n) + \sum_{i=1}^{n-1} G(x_i)(f_n(x_{i-1}) - f_n(x_i))$$

L'application f_n étant décroissante, les $f_n(x_i)$ positives et $m \le G(x_i) \le M$ on a :

$$m(\sum_{i=1}^{n-1}(f_n(x_{i-1}) - f_n(x_i)) + f_n(x_{n-1})) \le \int_a^b f_n(x)g(x)dx \le M(\sum_{i=1}^{n-1}(f_n(x_{i-1}) - f_n(x_i)) + f_n(x_{n-1})).$$

C'est-à-dire, $mf_n(a) \le \displaystyle\int_a^b f_n(x)g(x)dx \le Mf_n(a)$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, comme $f_n(a) = f(a)$, on a

$$mf(a) \le \int_a^b f_n(x)g(x)dx \le Mf(a).$$

Pour conclure, il suffit de montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(x)g(x)dx = \int_a^b f(x)g(x)dx.$

2) Soit n un entier strictement positif. L'application f étant décroissante, nous avons pour tout entier $i \in \{0, \ldots, n-1\}$, et pour tout $x \in [x_i,\ x_{i+1}[$,

$$0 \le f_n(x) - f(x) \le f(x_i) - f(x_{i+1}).$$

Donc,

$$0 \le \int_{x_i}^{x_{i+1}}(f_n(x) - f(x))dx \le \frac{b-a}{n}[f(x_i) - f(x_{i+1})].$$

Ainsi, $\forall n \ge 1$,

$$0 \le \int_a^b (f_n(x) - f(x))dx = \sum_{i=0}^{n-1}\int_{x_i}^{x_{i+1}}(f_n(x) - f(x))dx \le \frac{b-a}{n}\sum_{i=0}^{n-1}[f(x_i) - f(x_{i+1})] = \frac{b-a}{n}(f(a) - f(b)),$$

Par conséquent, $\forall n \ge 1$,

$$\left|\int_a^b (f_n(t)g(x) - f(x)g(x))dx\right| \le \int_a^b |f_n(x) - f(x)||g(x)|dx = \int_a^b (f_n(x) - f(x))|g(x)|dx$$

$$\le \sup_{t\in[a,b]}|g(x)|\int_a^b (f_n(x) - f(x))dx \le \sup_{x\in[a,b]}|g(x)|\frac{b-a}{n}(f(a) - f(b)).$$

On en déduit

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(x)g(x)dx = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

ce qu'il fallait démontrer. ∎

3.75 THÉORÈME (RÈGLE D'ABEL)
Soient $f,\ g$ des fonctions localement intégrables sur $[a,\ b[$ telles que :
1) f est décroissante à valeurs positives sur $[a,\ b[$ avec $\lim\limits_{x\to b} f(x) = 0$;
2) il existe un réel $C > 0$ tel que :

$$\forall x \in [a,\ b\ [,\ \left|\int_a^x g(t)dt\right| \leq C$$

Alors, l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)dx$ est convergente.

Démonstration: La seconde formule de la moyenne nous permet d'écrire pour $[X, Y] \subset [a,\ b[$:

$$\int_X^Y f(t)g(t)dt = f(X)\int_X^Z g(t)dt$$

pour un certain $Z \in [X,\ Y]$. Comme f est positive et $\lim\limits_{x\to b} f(x) = 0$, pour tout réel $\epsilon > 0$, il existe $c \in [a, b[$ tel que pour tout $x \in [c, b[$

$$0 \leq f(x) \leq \epsilon.$$

Alors pour $c < X < Y < b$ on a $\displaystyle\left|\int_X^Y f(t)g(t)dt\right| \leq \epsilon \left|\int_X^Z g(t)dt\right|$
avec :

$$\left|\int_X^Z g(t)dt\right| = \left|\int_a^Z g(t)dt - \int_a^X g(t)dt\right| \leq 2C.$$

On a donc $\displaystyle\left|\int_X^Y f(t)g(t)dt\right| \leq 2C\epsilon$ pour $c < X < Y < b$, en déduit, par le théorème de Cauchy, la convergence de $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)dx$. ∎

3.77 EXEMPLE. Montrons que si $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est une fonction localement intégrable, décroissante et telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, alors, pour tout réel λ non nul,
l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\sin(\lambda t)dt$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\cos(\lambda t)dt$ sont convergentes.

En effet, pour tout réel $x > 0$, on a :

$$\left|\int_0^x \sin(\lambda t)dt\right| = \frac{1}{|\lambda|}|1-\cos(\lambda x)| \leq \frac{2}{|\lambda|}$$

$$\left|\int_0^x \cos(\lambda t)dt\right| = \frac{1}{|\lambda|}|\sin(\lambda t)| \leq \frac{1}{|\lambda|}$$

La fonction f étant décroissante et à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, on déduit de la Règle d'Abel que les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\sin(\lambda t)dt$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\cos(\lambda t)dt$ sont convergentes pour tout réel $\lambda \neq 0$.

Par exemple, les intégrales généralisées, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{1+t^2}dt$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(2t)}{1+e^t}dt$ sont convergentes.

3.78 Exercice Montrer que si $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est une fonction localement intégrable, décroissante et telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ alors
$\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\sin(t)dt$ converge absolument si et seulement si $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge.